TECHNION – ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
32000 HAIFA, ISRAEL

הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למתמטיקה
חיפה 32000

בס"ד, יום שישי, כ"ח תשרי, תשפ"ג

13.10.23

מבחן בחדו"א 1מ – 104018 – אביב תשפ"ג – 2023 – מועד ב'

- משך הבחינה שלוש שעות.
- יש לכתוב בעט שחור או כחול בלבד.
- אסור להשתמש בחומר עזר
- במבחן שלושה חלקים. חלק ראשון שמכיל שאלות פתוחות, חלק שני שאלות נכון/לא נכון וחלק שלישי של שאלות רב בררתיות ("אמריקאיות").
- בחלק של השאלות הפתוחות יש לנמק היטב כל צעד
- את כל התשובות יש לכתוב בגוף השאלון.

שאלה 1 (20 נק')

(שימו לב! שאלה זו, בנוסף להיותה חלק אינטגרלי מהבחינה, משמשת כתחליף לבוחן למי שזכאי לכך)

א. (10 נק') הראו כי $\frac{x}{2} \le \ln(1+x) \le x$ עבור $0 \le x \le 1$

פתרון. נסמן $f(x) = ln(1+x) - x$. ברור ש-$f(0) = 0$ כמו כן $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 \le 0$ בתחום הנתון ולכן $f(x) \le 0$ בתחום כלומר $ln(1+x) \le x$ בתחום.

נסמן $f(x) = ln(1+x) - \frac{x}{2}$. ברור ש-$f(0) = 0$ כמו כן $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \ge 0$ בתחום הנתון ולכן $f(x) \ge 0$ בתחום הנתון כלומר $ln(1+x) \ge \frac{x}{2}$ בתחום הנתון

ב. (10 נק') הראו כי $\frac{1}{6} \le \int_0^1 \ln(1+x^2) \le \frac{1}{3}$

ע"פ סעיף קודם

$$\int_0^1 \ln(1+x^2) \le \int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 \ln(1+x^2) \ge \int_0^1 \frac{x^2}{2} = \frac{1}{6}$$

שאלה 2 (20 נקודות)

א. (5 נק') נסחו את משפט ערך הביניים

ראה ברשימות הקורס

ב. (15 נק') מצאו את מספר השורשים של המשוואה $(x-\sin(x))^2=1$ בקטע $[-1,1]$

פתרון.

מהמשוואה נקבל שתי אפשרויות

$$x-\sin(x)=1$$

או

$$x-\sin(x)=-1$$

נמצא את מספר השורשים של $x-\sin(x)=1$

נסמן $f(x)=x-\sin(x)-1$ אזי $f'(x)=1-cos(x)\geq 0$ ולכן הפונקציה מונוטונית עולה בקטע. כמו כן

$$f(1)=1-\sin(1)-1<0$$

$$f(-1)=-1-\sin(-1)-1<0$$

ולכן הפונקציה לא חותכת את ציר ה-x בתחום

מצא את מספר השורשים של $x-\sin(x)=-1$

נסמן $f(x)=x-\sin(x)+1$ אזי $f'(x)=1-cos(x)\geq 0$ ולכן הפונקציה מונוטונית עולה בקטע. כמו כן

$$f(1)=1-\sin(1)+1>0$$

$$f(-1)=-1-\sin(-1)+1>0$$

ולכן הפונקציה לא חותכת את ציר ה-x בתחום

שאלה 3 (15 נק')

א. (10 נק') חשבו את $\sqrt{2}$ ברמת דיוק של $\frac{1}{10}$

פתרון

פתרון. נפתח את הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ לפולינום טיילור בסביבה של הנקודה $x=1$ מסדר 2

$$f(x)= f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

כאשר

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-3/2}$$

$$f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-5/2}$$

והשארית היא: (c בין 1 ל-2)

$$|\mathrm{R}_0|=\left|\frac{\frac{1}{2}\mathrm{c}^{-1/2}(\mathrm{x}-1)}{1!}\right|\le\left|\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right|=\frac{1}{2}>\frac{1}{100}$$

$$|\mathrm{R}_1|=\left|\frac{-\frac{1}{4}\mathrm{c}^{-3/2}(\mathrm{x}-1)^2}{2!}\right|\le\left|\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\right|=\frac{1}{8}>\frac{1}{100}$$

$$|\mathrm{R}_2|=\left|\frac{\frac{3}{8}\mathrm{c}^{-5/2}(\mathrm{x}-1)^3}{3!}\right|\le\left|\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{6}\cdot 1\right|=\frac{3}{48}>\frac{1}{100}$$

ולכן

$$\sqrt{2}\approx\ 1+\frac{1}{2}1^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}1^{-3/2}=1+\frac{1}{2}\ -\frac{1}{8}$$

א. (5 נק') מצאו את $sin\frac{\pi}{4}$ ברמת דיוק של $\frac{1}{20}$ באמצעות תוצאת סעיף א בלבד.

פתרון. ע"פ סעיף א

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2}1^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}1^{-3/2} + \mathrm{R}_2 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \mathrm{R}_2$$

כאשר $|\mathrm{R}_2| < \frac{1}{10}$

ולכן

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{\mathrm{R}_2}{2}$$

כאשר $\left|\frac{\mathrm{R}_2}{2}\right| < \frac{1}{20}$

כלומר

$$sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16}$$

חלק שני רב ברירתי – "אמריקאי" (35 נקודות)

שאלה 1 (7 נק')

כמה שורשים יש לנגזרת של הפונקציה $ln\left(1+cos(x)\right)+x$ בקטע $[0,1)$

א. 0 ב. 1 ג. 2 ד. 3 ה. 4

שאלה 2 (7 נק')

נתונים שני הטורים הבאים $I=\sum_{n=2}^{\infty} cos^2\left(\frac{1}{ln(n)}\right)\left(ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ ו-

$II=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\left(1+\frac{1}{n}tan\left(\frac{2}{n}\right)\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$ אזי

א. שניהם מתכנסים

ב. שניהם מתבדרים

ג. I מתכנס II מתבדר

ד. II מתכנס I מתבדר

שאלה 3 (7 נק')

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)(x-2)^n$ מתכנס עבור ה-x -ים הבאים

א. $1\le x\le 3$ **ב**. $1\le x<3$ ג. $1<x\le 3$ ד. $-\infty<x<\infty$ ה. $x=4$

שאלה 4 (7 נק')

נתונה הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} xlnx & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

א. $f(x)$ **גזירה ב-**$\mathbb{R}$

ב. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_x^{x^2} f(t)dt}{x^2}=\infty$

ג. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_x^{x^2} f(t)dt}{x^2}=-\infty$

ד. **לפונקציה** $f(x)$ **אין נקודת מינימום ב-**$\mathbb{R}$

ה. **לפונקציה** $f(x)$ **יש נקודת מקסימום ב-**$\mathbb{R}$

שאלה 5 (7 נק')

נתונים שני האינטגרלים $I=\int_0^1\frac{ln(1+x)dx}{x^2sinx}$ ו- $II=\int_1^{\infty}\ln(x)\,sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ אזי

א. שניהם מתכנסים

ב. שניהם מתבדרים

ג. I מתכנס II מתבדר

ד. II מתכנס I מתבדר

סמנו נכון/לא נכון בסעיפים הבאים (10 נק' - 2 נק' לכל סעיף)

1. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right)=1$

א. נכון **ב. לא נכון**

2. לכל $x \geq 0$ מתקיים $sin(x^2) \leq x$

א. נכון **ב. לא נכון**

3. אם $\lim_{n\to\infty}(a_{2n+1}-a_{2n})=0$ אזי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

א. נכון **ב. לא נכון**

4. תהא $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ עם נקודת קיצון מקומי יחידה בקטע אזי קיימת נקודה x_0 בקטע כך ש- $f'(x_0)=0$

א. נכון **ב. לא נכון**

5. אם $|f(x)| \leq x^2$ אזי f גזירה פעמיים ב- $x=0$

א. נכון **ב. לא נכון**

דף ריק במידת הצורך

בהצלחה!